बीजगणित के मुख्य प्रकार और उनके हल

1. रैखिक समीकरण (Linear Equation)

प्रकार	सवाल (Question)
एक चर वाला समीकरण	$5x - 3 = 2x + 12$ में x का मान ज्ञात कीजिए।
हल (Solution)	$5x - 3 = 2x + 12$ $5x - 2x = 12 + 3$ $3x = 15$ $x = \frac{15}{3}$
उत्तर (Answer)	$\mathbf{x = 5}$

2. रैखिक समीकरण प्रणाली (System of Linear Equations)

(विलोपन विधि/Elimination Method का उपयोग)

प्रकार	सवाल (Question)
दो चर वाला समीकरण	निम्न समीकरणों को हल करें: I. $2x + y = 8$ II. $x - y = 1$
हल (Solution)	समीकरण I और II को जोड़ने पर: $(2x + y) + (x - y) = 8 + 1$ $3x = 9$ $x = 3$ $x = 3$ का मान समीकरण II में रखने पर: $3 - y = 1$ $3 - 1 = y$ $y = 2$
उत्तर (Answer)	$\mathbf{x = 3, y = 2}$

3. बहुपद का गुणनफल (Multiplication of Polynomials)

प्रकार	सवाल (Question)
बहुपदों का गुणा	$(2x + 3)(x - 4)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
हल (Solution)	$(2x + 3)(x - 4) = 2x(x - 4) + 3(x - 4) = 2x^2 - 8x + 3x - 12$ **समान पद** (Like Terms) **को मिलाने पर:** $= 2x^2 + (-8x + 3x) - 12$
उत्तर (Answer)	$\mathbf{2x^2 - 5x - 12}$

4. द्विघात समीकरण (Quadratic Equation)

(गुणनखंडन विधि/Factorization Method)

प्रकार	सवाल (Question)
द्विघात समीकरण हल	समीकरण $x^2 + x - 12 = 0$ के मूल (roots) ज्ञात कीजिए।
हल (Solution)	$x^2 + x - 12 = 0$ **मध्य पद** (Middle term) को $4x$ और $-3x$ में विभाजित करने पर: $x^2 + 4x - 3x - 12 = 0$ $x(x+4) - 3(x+4) = 0$ $(x-3)(x+4) = 0$ या तो $x - 3 = 0$ या $x + 4 = 0$
उत्तर (Answer)	$\mathbf{x = 3}$ या $\mathbf{x = -4}$

5. घातांक का नियम (Law of Exponents)

प्रकार	सवाल (Question)
घातों का सरल करना	$\frac{(a^5 \cdot a^{-2})}{a^3}$ को सरल कीजिए।
हल (Solution)	**अंश (Numerator):** $a^5 \cdot a^{-2} = a^{(5+(-2))} = a^3$ **पूरा व्यंजक:** $\frac{a^3}{a^3}$ $a^{(3-3)} = a^0$ *याद रखें: किसी भी गैर-शून्य संख्या की घात 0, 1 के बराबर होती है।*
उत्तर (Answer)	$\mathbf{1}$

6. करणी को सरल करना (Simplifying Radicals)

प्रकार	सवाल (Question)
वर्गमूल को सरल करना	$\sqrt{72}$ को सरलतम करणी रूप (simplest radical form) में लिखिए।
हल (Solution)	72 के गुणनखंड (factors) ज्ञात करें: $72 = 36 \times 2$ $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$ $\sqrt{36}$ एक पूर्ण वर्ग (perfect square) है, इसलिए: $\sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2}$
उत्तर (Answer)	$\mathbf{6\sqrt{2}}$

बीजगणित के अन्य उन्नत प्रकार (Other Advanced Types of Algebra)

7. असमानताएं (Inequalities)

प्रकार	सवाल (Question)
एक चर वाली असमानता	$7 - 2x \geq 1$ को हल करें।
हल (Solution)	$7 - 2x \geq 1$ $-2x \geq 1 - 7$ $-2x \geq -6$ (ऋणात्मक संख्या से भाग देने पर असमानता का चिह्न बदल जाता है) $x \leq \frac{-6}{2}$
उत्तर (Answer)	$\mathbf{x \leq 3}$ (अर्थात x का मान 3 या 3 से कम है)

8. फलन और मान ज्ञात करना (Functions and Evaluation)

प्रकार	सवाल (Question)
फलन का मान ज्ञात करना	यदि फलन $f(x) = 3x^2 - x + 5$ है, तो $f(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए।
हल (Solution)	हमें x के स्थान पर (-2) रखना है: $f(-2) = 3(-2)^2 - (-2) + 5$ $f(-2) = 3(4) + 2 + 5$ $f(-2) = 12 + 2 + 5$
उत्तर (Answer)	$\mathbf{f(-2) = 19}$

9. अनुपात और समानुपात (Ratios and Proportions)

प्रकार	सवाल (Question)
चर के लिए हल करना	यदि $\frac{4}{x} = \frac{6}{15}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
हल (Solution)	क्रॉस-गुणा (Cross-multiplication) करने पर: $4 \times 15 = 6 \times x$ $60 = 6x$ $x = \frac{60}{6}$
उत्तर (Answer)	$\mathbf{x = 10}$

10. बीजगणितीय भिन्न (Algebraic Fractions/Rational Expressions)

प्रकार	सवाल (Question)
भिन्न का जोड़	$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$ को जोड़िए।
हल (Solution)	LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) $\mathrm{x}(x+1)$ होगा: $\frac{1(x+1)}{x(x+1)} + \frac{2(x)}{x(x+1)}$ $\frac{x+1+2x}{x(x+1)}$ $\frac{3x+1}{x(x+1)}$
उत्तर (Answer)	$\frac{3x+1}{x^2+x}$