

1. क्षेत्रमिति की मूल बातें (Basics of Mensuration)

क्षेत्रमिति, ज्यामितीय आकृतियों के परिमाण (Perimeter), क्षेत्रफल (Area) और आयतन (Volume) को मापने का विज्ञान है।

अवधारणा (Concept)	2D आकृतियाँ (Plane Figures)	3D आकृतियाँ (Solid Figures)
परिमाण (Perimeter - P)	सभी भुजाओं की लंबाई का योग।	लागू नहीं होता।
क्षेत्रफल (Area - A)	आकृति द्वारा घेरा गया समतल क्षेत्र (Surface covered)।	वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA) / सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) होता है।
आयतन (Volume - V)	लागू नहीं होता।	आकृति द्वारा घेरा गया त्रि-आयामी स्थान (Space occupied)।

2. 2D आकृतियाँ और सूत्र (2D Figures and Formulas)

आकृति (Figure)	परिमाण (Perimeter - P)	क्षेत्रफल (Area - A)
वर्ग (Square) (भुजा a)	$4a$	a^2
आयत (Rectangle) (लंबाई l , चौड़ाई b)	$2(l + b)$	$l \times b$
त्रिभुज (Triangle) (आधार b , ऊँचाई h)	$a + b + c$ (तीनों भुजाओं का योग)	$\frac{1}{2} \times b \times h$
विषमबाहु Δ (भुजाएँ a, b, c)	$2s = a + b + c$	$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (हीरोन का सूत्र)
समबाहु Δ (भुजा a)	$3a$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
वृत्त (Circle) (त्रिज्या r)	$2\pi r$ (परिधि)	πr^2
समांतर चतुर्भुज (Parallelogram) (आधार b , ऊँचाई h)	$2(a + b)$	$b \times h$
समचतुर्भुज (Rhombus) (विकर्ण d_1, d_2)	$4a$	$\frac{1}{2}d_1d_2$
समलंब (Trapezium) (समांतर भुजाएँ a, b , ऊँचाई h)	$a + b + c + d$	$\frac{1}{2}(a + b)h$

3. 3D आकृतियाँ और सूत्र (3D Figures and Formulas)

आकृति (Figure)	आयतन (Volume - V)	वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA) / पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (LSA)	सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA)
घन (Cube) (भुजा a)	a^3	$4a^2$	$6a^2$
घनाभ (Cuboid) (l, b, h)	$l \times b \times h$	$2h(l + b)$	$2(lb + bh + hl)$
बेलन (Cylinder) (त्रिज्या r , ऊँचाई h)	$\pi r^2 h$	$2\pi r h$	$2\pi r(r + h)$
शंकु (Cone) (त्रिज्या r , ऊँचाई h , तिर्यक ऊँचाई l)	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi r l$	$\pi r(r + l)$

आकृति (Figure)	आयतन (Volume - V)	वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA) / पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (LSA)	सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA)
घन (Cube) (भुजा a)	a^3	$4a^2$	$6a^2$
घनाभ (Cuboid) (l, b, h)	$l \times b \times h$	$2h(l + b)$	$2(lb + bh + hl)$
बेलन (Cylinder) (त्रिज्या r , ऊँचाई h)	$\pi r^2 h$	$2\pi r h$	$2\pi r(r + h)$
शंकु (Cone) (त्रिज्या r , ऊँचाई h , तिर्यक ऊँचाई l)	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi r l$	$\pi r(r + l)$
गोला (Sphere) (त्रिज्या r)	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
अर्ध-गोला (Hemisphere) (त्रिज्या r)	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$

4. क्षेत्रमिति के मुख्य प्रकार और हल (Main Types and Solved Examples)

प्रतियोगिता परीक्षाओं में 2D और 3D के प्रश्नों को अक्सर मिलाकर पूछा जाता है।

प्रकार 1: बुनियादी गणना (Basic Calculation) – 2D

प्रश्न: एक आयताकार मैदान की लंबाई 20 मी और चौड़ाई 15 मी है। इसका क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल:

1. क्षेत्रफल (A):

$$A = l \times b$$

$$A = 20 \text{ मी} \times 15 \text{ मी} = 300 \text{ वर्ग मीटर}$$

2. परिमाप (P):

$$P = 2(l + b)$$

$$P = 2(20 + 15) = 2 \times 35 = 70 \text{ मीटर}$$

प्रकार 2: रास्ता और क्षेत्रफल में परिवर्तन (Path and Area Change) – 2D

प्रश्न: 30 मी $\times$ 20 मी के आयताकार पार्क के बाहर चारों ओर 2 मी चौड़ा रास्ता बनाया गया है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:

1. पार्क का क्षेत्रफल ($A_{\text{पार्क}}$):

$$A_{\text{पार्क}} = 30 \times 20 = 600 \text{ वर्ग मी}$$

2. रास्ते सहित पार्क की विमाएँ (Dimensions with Path):

- नई लंबाई $L = 30 + (2 \times 2) = 34$ मी
- नई चौड़ाई $B = 20 + (2 \times 2) = 24$ मी

3. रास्ते सहित पार्क का क्षेत्रफल ($A_{\text{कुल}}$) :

$$A_{\text{कुल}} = 34 \times 24 = 816 \text{ वर्ग मी}$$

4. रास्ते का क्षेत्रफल ($A_{\text{रास्ता}}$) :

$$A_{\text{रास्ता}} = A_{\text{कुल}} - A_{\text{पार्क}}$$

$$A_{\text{रास्ता}} = 816 - 600 = 216 \text{ वर्ग मीटर}$$

प्रकार 3: आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल की गणना (V & TSA Calculation) - 3D

प्रश्न: एक घन की भुजा 5 सेमी है। इसका आयतन और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) ज्ञात कीजिए।

हल:

1. आयतन (V):

$$V = a^3$$

$$V = (5 \text{ सेमी})^3 = 125 \text{ घन सेमी}$$

2. सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA):

$$\text{TSA} = 6a^2$$

$$TSA = 6 \times (5 \text{ सेमी})^2 = 6 \times 25 = \mathbf{150} \text{ वर्ग सेमी}$$

प्रकार 4: एक आकृति से दूसरी आकृति में परिवर्तन (Conversion from one 3D shape to another)

जब किसी 3D वस्तु को पिघलाकर या काटकर एक नई वस्तु बनाई जाती है, तो आयतन समान रहता है।

प्रश्न: 12 सेमी त्रिज्या के एक गोले को पिघलाकर 2 सेमी त्रिज्या की कितनी छोटी गोलियाँ (Spherical Marbles) बनाई जा सकती हैं?

हल:

1. गोले का आयतन ($V_{\text{गोला}}$) :

$$V_{\text{गोला}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(12)^3$$

2. छोटी गोली का आयतन ($V_{\text{गोली}}$) :

$$V_{\text{गोली}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3$$

3. गोलियों की संख्या (N):

$$N = \frac{V_{\text{गोला}}}{V_{\text{गोली}}}$$

$$N = \frac{\frac{4}{3}\pi(12)^3}{\frac{4}{3}\pi(2)^3}$$

$$N = \frac{12^3}{2^3} = \left(\frac{12}{2}\right)^3 = 6^3 = \mathbf{216}$$

उत्तर: 216 छोटी गोलियाँ बनाई जा सकती हैं।

प्रकार 5: 2D और 3D का संयोजन (Combination of 2D and 3D)

प्रश्न: एक बेलनाकार टैंक का व्यास 14 मी है और ऊँचाई 5 मी है। इसे भरने में कितना पानी लगेगा और इसके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA) पर पेंटिंग का खर्च ₹ 10 प्रति वर्ग मीटर की दर से कितना होगा?

हल: यहाँ त्रिज्या $r = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{14}{2} = 7$ मी है, और ऊँचाई $h = 5$ मी है।

1. पानी की मात्रा (आयतन - V):

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \frac{22}{7} \times 7^2 \times 5 = \frac{22}{7} \times 49 \times 5$$

$$V = 22 \times 7 \times 5 = 770 \text{ घन मीटर}$$

2. पेंटिंग का क्षेत्रफल (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल - CSA):

$$\text{CSA} = 2\pi r h$$

$$\text{CSA} = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 5$$

$$\text{CSA} = 2 \times 22 \times 5 = 220 \text{ वर्ग मीटर}$$

3. कुल खर्च (Total Cost):

$$\text{खर्च} = \text{CSA} \times \text{दर}$$

3. कुल खर्च (Total Cost):

$$\text{खर्च} = \text{CSA} \times \text{दर}$$

$$\text{खर्च} = 220 \times 10 = \text{₹}2,200$$

इन मूल सूत्रों और 5 प्रमुख प्रकार के प्रश्नों को समझने के बाद, आप क्षेत्रमिति के अधिकांश प्रश्नों को हल करने में सक्षम होंगे। कठिन प्रश्न इन्हीं आधारों के जटिल संयोजन होते हैं।

6. प्रतिशत परिवर्तन पर आधारित प्रश्न (Based on Percentage Change)

जब विमाओं (Dimensions) में प्रतिशत परिवर्तन दिया जाता है और क्षेत्रफल या आयतन में कुल परिवर्तन पूछा जाता है।

प्रश्न (Example):

यदि एक आयत की लंबाई 20% बढ़ा दी जाए और चौड़ाई 10% घटा दी जाए, तो उसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन होगा?

हल (Solution):

1. सूत्र (Effective Percentage Change):

$$x\% + y\% + \frac{x \times y}{100}$$

जहाँ, $x = +20$ (बढ़ोतरी) और $y = -10$ (कमी)।

2. मान रखना:

$$\text{परिवर्तन} = +20 + (-10) + \frac{20 \times (-10)}{100}$$

$$\text{परिवर्तन} = 20 - 10 + \frac{-200}{100}$$

$$\text{परिवर्तन} = 10 - 2 = 8\%$$

उत्तर: क्षेत्रफल में 8% की वृद्धि होगी।

7. 3D आकृतियों के संयोजन का आयतन (Volume of Combined 3D Shapes)

जब दो या दो से अधिक आकृतियाँ एक साथ जुड़ी होती हैं (जैसे कैप्सूल, टेंट, आइसक्रीम कोन)।

प्रश्न (Example):

एक खिलौना शंकु के आकार का है, जो एक अर्ध-गोले पर रखा हुआ है। अर्ध-गोले का व्यास 6 सेमी है और शंकु की ऊँचाई 4 सेमी है। खिलौने का कुल आयतन ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

हल (Solution):

यहाँ, त्रिज्या $r = \frac{6}{2} = 3$ सेमी है। शंकु की ऊँचाई $h = 4$ सेमी है।

$$\text{कुल आयतन} = \text{शंकु का आयतन} + \text{अर्ध-गोले का आयतन}$$

$$\text{कुल आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\text{कुल आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 (h + 2r)$$

1. मान रखना:

$$\text{कुल आयतन} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times (4 + 2 \times 3)$$

$$\text{कुल आयतन} = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times (4 + 6)$$

$$\text{कुल आयतन} = 3\pi \times 10 = 30\pi \text{ घन सेमी}$$

2. गणना (अगर $\pi = 3.14$ लेते हैं):

$$\text{कुल आयतन} = 30 \times 3.14 = \mathbf{94.2} \text{ घन सेमी}$$

8. परिमाप/क्षेत्रफल का अनुपात और संबंध (Ratio and Relation of Perimeter/Area)

जब किसी आकृति की विमाएँ (Dimensions) दूसरी आकृति के परिमाप या क्षेत्रफल से संबंधित होती हैं।

प्रश्न (Example):

एक तार को मोड़कर 14 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनाया जाता है। यदि उसी तार को एक वर्ग के रूप में मोड़ा जाए, तो वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल (Solution):

1. तार की लंबाई (वृत्त की परिधि): तार की लंबाई ही वृत्त की परिधि है।

$$P_{\text{वृत्त}} = 2\pi r$$

$$P_{\text{वृत्त}} = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = 2 \times 22 \times 2 = 88 \text{ सेमी}$$

2. वर्ग की भुजा (a): वर्ग का परिमाण ($P_{\text{वर्ग}}$) भी तार की लंबाई (88 सेमी) के बराबर होगा।

$$P_{\text{वर्ग}} = 4a$$

$$88 = 4a \implies a = \frac{88}{4} = 22 \text{ सेमी}$$

3. वर्ग का क्षेत्रफल (A):

$$A = a^2$$

$$A = 22^2 = 484 \text{ वर्ग सेमी}$$

9. पहिए के घुमाव पर आधारित प्रश्न (Based on Revolutions of a Wheel)

पहिए द्वारा तय की गई दूरी उसकी परिधि और घुमावों (Revolutions) की संख्या पर निर्भर करती है।

प्रश्न (Example):

एक पहिए का व्यास 70 सेमी है। 440 मीटर की दूरी तय करने में यह कितने चक्कर (चक्र) लगाएगा?

हल (Solution):

1. त्रिज्या (r) और परिधि (C):

- त्रिज्या $r = \frac{70}{2} = 35$ सेमी
- 1 चक्कर में तय दूरी (परिधि C) = $2\pi r$

$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 35 = 2 \times 22 \times 5 = 220 \text{ सेमी}$$

2. तय की गई कुल दूरी (मीटर को सेमी में बदलें):

$$\text{कुल दूरी} = 440 \text{ मीटर} = 440 \times 100 = 44000 \text{ सेमी}$$

3. चक्करों की संख्या (N):

$$\text{चक्करों की संख्या (N)} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{एक चक्कर में दूरी}}$$

$$N = \frac{44000}{220} = 200$$

उत्तर: पहिया **200** चक्कर लगाएगा।